

## CAPITOLO 6

### TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE

"La teoria esposta nel seguito costituisce l'estensione più vasta pensabile della teoria indicata in generale al giorno d'oggi come *teoria della relatività* ...".

A. Einstein (1916).

Caratteri 19300

12/03/2019 13:58:59

6.1 La teoria della relatività generale.

6.2 La struttura concettuale dell'articolo originale di A. Einstein del 1916.

6.3 La gravità e altri problemi della Meccanica Classica.

6.3.1 L'equivalenza fra la massa inerziale e la massa gravitazionale.

6.3.2 Intermezzo formale: la seconda legge della dinamica in sistemi non inerziali

6.4 Un nuovo concetto: lo spazio-tempo curvo è reale.

6.4.1 Lo spazio-tempo è curvato dalle masse

6.5 Conseguenze delle equazioni del campo di Einstein

6.5.1 Un effetto quotidiano: il GPS

6.6 L'ultima predizione verificata: le onde gravitazionali

## 6.1. La Teoria della Relatività Generale

La Relatività Generale è, matematicamente, una teoria estremamente complessa. Einstein stesso disse che era il problema più complicato che avesse mai affrontato. Impiegò circa dieci anni a sviluppare tutta la teoria, pubblicata nel 1916<sup>1</sup>.

Nelle pagine che seguono ne darò una visione semplificata, fermandomi in particolare sui problemi scientifici ed epistemologici da cui nacque, sugli effetti, agli inizi del '900 non spiegati, che invece la teoria spiega perfettamente, e sugli aspetti che ci coinvolgono nella vita di tutti i giorni e nella descrizione del mondo che ci circonda.

Il punto chiave è questo: la Meccanica Classica, quella di Newton e di Galilei, ha dei grossi problemi, sia in ambito strettamente logico che nella descrizione quantitativa di alcuni fenomeni. E questa volta il moto relativo non c'entra, la spiegazione non può derivare dalla Relatività Speciale. Ci deve essere qualcosa di nuovo. Questo qualcosa sarà l'effetto delle masse (e quindi dell'energia) sulla struttura dello Spazio-Tempo, che verrà nuovamente ridefinito, dopo la modifica fatta dalla Relatività Speciale.

Il famoso articolo del 1916 inizia così "La teoria esposta nel seguito costituisce l'estensione più vasta pensabile della teoria indicata in generale al giorno d'oggi come *teoria della relatività ...*". Si vede subito come questa volta Einstein voglia trovare una soluzione "definitiva" al problema della definizione dello spazio e del tempo.

Nel paragrafo che segue vorrei riportare la struttura originale dell'articolo di Einstein esemplificando il contenuto concettuale dei vari paragrafi. Chi non volesse seguire questa descrizione può passare direttamente al paragrafo 6.3 in cui presenteremo la descrizione semplificata della teoria.

## 6.2. La struttura dell'articolo originale di A. Einstein del 1916

Le frasi *in corsivo* sono tratte direttamente dall'articolo originale. I numeri dei paragrafi sono quelli dell'articolo originale.

### 1. Osservazioni sulla Teoria della Relatività speciale

*"...A due punti materiali prefissati di un corpo (rigido) a riposo corrisponde perciò sempre un segmento di lunghezza completamente determinata, indipendente dalla posizione e dall'orientamento del corpo, come pure dal tempo; a due prefissate posizioni delle lancette dell'orologio rispetto ad un sistema di riferimento (consentito) corrisponde sempre un intervallo temporale di lunghezza determinata, indipendente dalla posizione e dal tempo. Si mostrerà subito che la teoria della relatività generale non può attenersi a questa semplice interpretazione fisica dello spazio e del tempo."*

In queste poche righe c'è l'essenza del problema e di ciò a cui si arriverà: in relatività speciale era possibile definire per un oggetto (per un intervallo di tempo), la lunghezza a riposo  $L_0$  (la durata a riposo  $\tau_0$ ). Esistevano quindi degli assoluti che definivano le grandezze spaziali e quelle temporali. Questo non sarà più possibile.

---

<sup>1</sup> La famosa equazione del campo (gravitazionale) di Einstein fu da lui presentata all'Accademia prussiana delle scienze il 25.11.1915, l'articolo venne poi pubblicato qualche mese dopo: "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Annalen der Physik **49**, 769-822 (1916).

## 2. Sulle ragioni che raccomandano un'estensione del postulato di relatività

In questo paragrafo Einstein mostra come la meccanica classica e la relatività speciale contengano un difetto epistemologico. Ed arriva ad affermare *"Le leggi della fisica devono essere di natura tale da valere rispetto ad un sistema di riferimento in moto arbitrario"*. Cioè si dovrà abbandonare la richiesta che l'equivalenza delle leggi della fisica sia valida solo per sistemi inerziali. Si presenta l'esempio dell'ascensore (vedi dopo), e si chiarisce che qualunque teoria generale dovrà includere una teoria della gravitazione.

## 3. Il continuo spaziotemporale...

Einstein chiarisce come vadano intesi lo spazio ed il tempo nella vecchia teoria ed in quella nuova:

*"Nella meccanica classica e anche nella teoria della relatività speciale le coordinate dello spazio e del tempo hanno un significato fisico immediato... Quest'idea dello spazio e del tempo è sempre presente ai fisici, anche se per lo più in modo inconscio, ... ma mostreremo ora che bisogna abbandonarla e sostituirla con una più generale"...*

Viene enunciato il primo postulato della relatività generale (l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento nella descrizione delle leggi della natura), il cosiddetto postulato della covarianza generale: *"Le leggi generali della natura sono da esprimersi con equazioni che valgano per tutti i sistemi di coordinate..."* chiarendo perché questo postulato *"che sottrae allo spazio e al tempo l'ultimo residuo di oggettività fisica"* sia un postulato naturale (non è ovvio).

## 4. ...espressione analitica del campo gravitazionale

Viene enunciata la struttura che avrà lo spazio-tempo chiarendo che *"La gravitazione, secondo la teoria della relatività generale, gioca pertanto un ruolo eccezionale rispetto alle altre forze, in particolare rispetto a quelle elettromagnetiche, poiché le 10 funzioni che rappresentano il campo gravitazionale determinano allo stesso tempo le proprietà metriche dello spazio misurabile tetradimensionale"*. Si enuncia e si chiarisce la caratteristica fondamentale della teoria: il fatto che il campo gravitazionale, che è generato dalle masse, agisce sulla struttura dello spazio-tempo, modificandone la metrica (la distanza fra punti).

## 5. → 20. Descrizione matematica della struttura dello spazio-tempo curvo e teoria della relatività generale

### 21. Teoria di Newton come prima approssimazione

Si mostra come, nel caso di un campo gravitazionale debole quale quello creato dal Sole a grande distanza da esso, o dalla Terra, o da tutti gli altri pianeti, le equazioni della relatività generale si riducano alla legge di gravitazione universale di Newton.

## 22. Comportamento dei regoli e degli orologi in campi gravitazionali statici. Curvatura dei raggi di luce. Moto del perielio delle orbite planetarie.

Vengono calcolati gli effetti predetti nel paragrafo 1 sulle misure di spazi e di tempi, sulla curvatura della luce nei pressi del Sole, misurata da A.S. Eddington nel 1919, e sul perielio di Mercurio.

### 6.3. La gravità e altri problemi della meccanica classica

La Relatività Speciale prevede che non possano esistere segnali che viaggiano a velocità maggiore di quella della luce. Ma esiste la forza di Gravità, quella della legge di gravitazione universale di Newton:

$$F = G \frac{m_g M}{r^2}$$

Questa relazione è una relazione di uguaglianza fra le due quantità a sinistra e a destra dell'uguale. Questo vuol dire che un osservatore potrebbe misurare la forza  $F$  su di un corpo di massa  $m_g$ , poi potrebbe misurare la grandezza  $G \frac{m_g M}{r^2}$  e dovrebbe trovare lo stesso valore (entro le incertezze sperimentali).

Supponiamo ora di scrivere questa relazione per la Terra e per il Sole, e che il Sole si sposti di un po'...la Terra sentirà una forza diversa (in modulo, in direzione, o in modulo e direzione) ...ma quando? Istantaneamente? Secondo Newton sì. La relazione dice che le due grandezze vanno misurate nello stesso istante. Questo, secondo la teoria della relatività speciale, non è possibile; i sistemi sono in movimento, quindi non è possibile definire una simultaneità degli eventi. La Terra per esempio "sente" qualunque cambiamento del Sole con almeno otto minuti di ritardo; infatti se l'effetto che subisce è causato dal Sole, allora questo effetto, che è un segnale, non può viaggiare ad una velocità maggiore di quella della luce, che appunto impiega circa otto minuti ad andare dal Sole alla Terra. Quella formula, così come è scritta, non va bene, va rivista.

Vi sono anche altri fenomeni che non trovano spiegazione utilizzando le teorie classiche: la precessione del perielio dell'orbita di Mercurio per esempio. L'orbita con cui Mercurio ruota intorno al Sole è un'ellisse, ma questa ellisse non è "ferma" in un sistema di riferimento solidale con il Sole, il suo asse ruota leggermente nel tempo, compiendo un piccolo cono intorno all'asse medio di rotazione. Questo fenomeno, chiamato precessione, era stato misurato con grande accuratezza: le misure erano molto precise<sup>2</sup>, ma nessuna teoria poteva giustificare interamente i valori misurati. Anche tenendo conto di tutte le interazioni con gli altri pianeti le osservazioni fatte erano in disaccordo con i calcoli fatti utilizzando la forza gravitazionale<sup>3</sup>.

Quindi sembrava che molti problemi scaturissero quando c'era di mezzo la "forza di gravità". È questo il punto da cui Einstein parte per rianalizzare nuovamente il concetto di spazio e di tempo.

<sup>2</sup> Le misure delle orbite dei corpi celesti erano molto precise fin dall'antichità. Keplero per esempio disponeva dei dati orbitali di Marte, misurati da Ticho Brahe, con un'incertezza di circa 0,03 gradi, quindi una frazione 5/10'000 dell'angolo retto. E' come se misurassi una lunghezza di 10 km con l'approssimazione di 5 metri.

<sup>3</sup> La misura forniva un valore di 5600"/secolo, mentre il calcolo dell'interazione con gli altri pianeti forniva 5557"/secolo, una differenza di 43"/secolo, piccola ma rivelabile, e in ogni caso molto minore dell'incertezza della misura.

### 6.3.1. L'equivalenza fra la massa inerziale e la massa gravitazionale

La legge che descrive la dinamica dei corpi in movimento è la seconda legge della dinamica:

$$F = m_i a$$

Dove  $m_i$  è la cosiddetta massa inerziale.

La legge che descrive la forza gravitazionale è la legge di Gravitazione universale di Newton:

$$F = G \frac{m_g M}{r^2}$$

Dove  $m_g$  è la cosiddetta massa gravitazionale.

Galileo nel 1638 afferma che queste due grandezze ( $m_i$ ,  $m_g$ ) sono uguali<sup>4</sup>, e lo prova con alcuni esperimenti (non molto precisi); qualche anno dopo anche Newton ribadisce la cosa<sup>5</sup>. Altri scienziati ripetono la misura nel corso dei secoli. Ad oggi  $m_i$  e  $m_g$  sono risultate uguali entro una parte su  $10^{14}$ , ma si tratta sempre di un'eguaglianza sperimentale. In linea di principio potrebbero differire, magari di molto meno di quanto non riusciamo ad apprezzare sperimentalmente.

Einstein nel 1916 fa qualcosa di più e di diverso: crea una nuova teoria della gravitazione in cui il punto di partenza è il principio dell'equivalenza fra massa inerziale e massa gravitazionale. Perché? Tutto parte da un'osservazione, un altro gendanken experiment, un esperimento ideale. Einstein suppone di trovarsi in un ascensore, in varie condizioni, e si chiede cosa osserverebbe una persona che si trovasse dentro l'ascensore, senza poter vedere fuori; è qualcosa di molto simile all'esperimento ideale di Galileo in cui l'autore immagina di trovarsi nella stiva di una nave, facendo una serie di esperimenti ed osservazioni da cui deduce di non potersi accorgere se la nave stia ferma o no rispetto alla Terra. Ma prima vediamo come si scrive la seconda legge della dinamica per un sistema di riferimento accelerato, quindi non inerziale.

### 6.3.2. Intermezzo formale: la seconda legge della dinamica in sistemi non inerziali

La seconda legge della dinamica viene scritta usualmente così:  $\bar{F} = m\bar{a}$ , dove  $\bar{F}$  è la forza risultante che agisce sul corpo di massa  $m$ , mentre  $\bar{a}$  è la sua accelerazione; entrambe le grandezze sono misurate in un sistema inerziale, che si muove quindi con velocità costante rispetto ad un altro sistema inerziale<sup>6</sup>. Cosa succede se mi trovo in un sistema non inerziale? Posso scrivere qualcosa di analogo? La risposta è: sì. Si può procedere come segue: supponiamo che il sistema di riferimento non inerziale si muova con accelerazione  $\bar{a}_0$ , in questo caso la seconda legge della dinamica può essere scritta così:

$$\bar{F}(\text{totale sentita dalla massa che accelera con accelerazione } \bar{a}_0) = \bar{F}_e - m\bar{a}_0 = m\bar{a}$$

questo vuol dire che, anche in assenza di forze esterne (quindi con  $\bar{F}_e = 0$ ) il corpo di massa  $m$  sentirà una forza  $F_a = m a_0$  in direzione contraria all'accelerazione del sistema di riferimento. È quello che succede quando ci troviamo su di un aereo che sta accelerando per decollare: l'aereo accelera e noi veniamo spinti all'indietro da una forza proporzionale all'accelerazione dell'aereo. Per noi non fa

<sup>4</sup> "... se si levasse totalmente la resistenza del mezzo, tutte le materie discenderebbero con eguali velocità", Galileo Galilei "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica, ed ai movimenti locali", pag.71, 1638.

<sup>5</sup> "This quantity that I mean hereafter under the name of...mass...is known by the weight...for it is proportional to the weight as I have found by experiments on pendulums, very accurately made...". I. Newton "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", 1680.

<sup>6</sup> Abbiamo già discusso dove finisce la "catena" dei sistemi inerziali nel par. 2.2.3.

differenza se la forza che ci spinge sia una forza reale – qualcuno che ci spinge – oppure se è l'effetto dell'accelerazione dell'aereo. Noi non possiamo accorgerci della differenza fra i due casi.

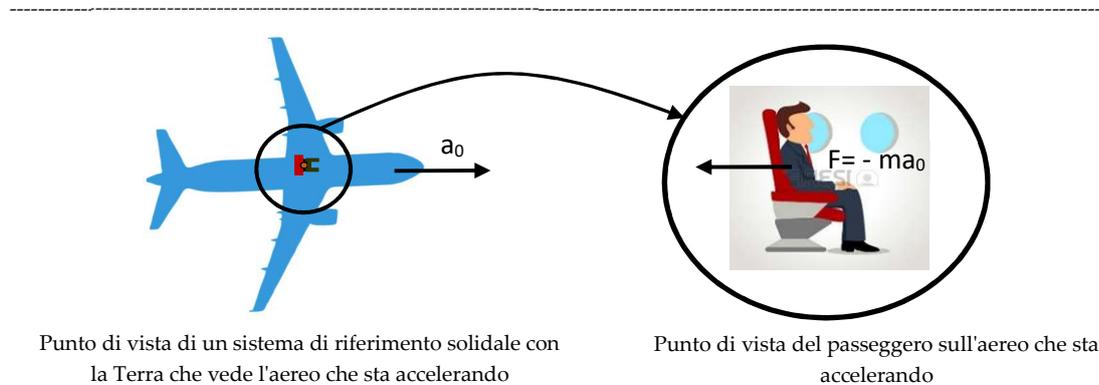


Fig. 6.1 Cosa succede ad una persona che si trova dentro un aereo al decollo che sta accelerando

Riprendiamo ora l'osservazione di Einstein, supponiamo quindi di trovarci dentro un ascensore, in due situazioni differenti (vedi Fig. 6.2):

Caso a) L'osservatore si trova dentro un ascensore che si trova nello spazio vuoto – molto lontano da qualunque corpo celeste, idealmente nello spazio fra una galassia e l'altra – questo ascensore ha un'accelerazione verso l'alto. L'osservatore sente quindi una forza che lo spinge verso il basso. Questa forza sarà  $\vec{F}_a = -m\vec{a}$ .

Caso b) Supponiamo ora che lo stesso ascensore si trovi sulla superficie terrestre, fermo rispetto alla Terra che supponiamo ferma - il moto intorno al Sole è inessenziale -. In questo caso l'osservatore sentirà una forza che lo attrae verso il basso, la forza di gravità dovuta all'accelerazione gravitazionale  $g$ :  $\vec{F}_b = -m\vec{g}$ .

a) Ascensore che accelera, nello Spazio



b) Ascensore fermo, sulla Terra



Fig. 6.2 L'esperimento ideale di una persona in un ascensore in due condizioni differenti. A. Einstein asserisce che le due situazioni sono indistinguibili per una persona che si trovi dentro l'ascensore, quindi le leggi della fisica nei due sistemi di riferimento devono essere equivalenti, anche se uno dei due sistemi è un sistema accelerato.

Quello che nota A. Einstein è che, se  $a = g$ , l'osservatore non ha modo di distinguere fra le due situazioni<sup>7</sup>, l'osservatore sente in ogni caso una forza che lo spinge verso il basso: se vale l'equivalenza  $m_i = m_g$ , non esiste modo di distinguere tra gli effetti di un campo gravitazionale uniforme o di un'accelerazione costante.

Quindi:

1) Le due masse, inerziale e gravitazionale, **DEVONO** essere uguali, e questo viene posto come principio.

2) È sempre possibile trovare un sistema (di riferimento) in cui gli effetti della forza di gravità siano identici a quelli di un'accelerazione costante **[localmente]**.

3) Ma allora posso scrivere una legge di relatività per **TUTTI** i sistemi di riferimento, anche per quelli non inerziali. [vedi RG originale]

Nell'articolo sulla RG del 1916 A. Einstein scrive quindi "... Non resta quindi altra possibilità che assumere tutti i sistemi di coordinate pensabili come in linea di principio ugualmente legittimi per la descrizione della natura".

Da questo punto parte Einstein per enunciare la teoria della Relatività Generale. Risolverà tutti (?) i problemi legati alla gravità. Il punto essenziale è che questo verrà fatto ridefinendo ancora una volta i concetti di spazio e di tempo.

#### 6.4. Un nuovo concetto: lo spazio-tempo curvo è reale

Cosa diceva la Fisica classica:

Esiste lo Spazio assoluto, esiste il Tempo assoluto. Lo spazio è **piatto**, cioè vale la geometria di Euclide. In questo spazio valgono le leggi della dinamica. Esistono la legge di gravitazione universale e le leggi dell'elettromagnetismo che descrivono le interazioni fra le masse e le cariche elettriche. Tutti i sistemi inerziali sono equivalenti (non posso distinguerli).

Cosa dice la Relatività Speciale:

Esiste lo Spazio-Tempo. Spazi e Tempi sono relativi e dipendenti uno dall'altro, tutti i sistemi inerziali sono equivalenti. Lo spazio è **piatto**, cioè vale la geometria di Euclide. La legge di gravitazione non entra nella Relatività Speciale.

Cosa dice la Relatività Generale:

Le masse «**curvano**» lo spazio-tempo. Lo spazio-tempo non è **piatto**, quindi in generale non vale la geometria di Euclide. I corpi si muovono seguendo le linee di universo di uno spazio curvo, cioè le geodetiche; non serve invocare la forza di gravità (povero Newton!). La relatività speciale continua a essere valida, ma viene estesa a sistemi accelerati, non inerziali...

Cosa vuol dire che lo spazio-tempo è curvo? Non è un concetto facile, è più semplice prendere come esempio uno spazio curvo in due dimensioni, tralasciando per ora la terza dimensione spaziale e la curvatura del tempo. Uno spazio curvo noto a tutti è quello di una superficie sferica – la Terra per esempio, oppure una palla-. In questo spazio la geometria euclidea non vale più. Per esempio posso avere triangoli in cui la somma degli angoli interni è maggiore di  $180^\circ$ . Oppure dati due punti il tragitto più corto che li unisce sarà una curva – nel caso della sfera deve essere un cerchio massimo, una circonferenza cioè che passa per i due punti e per il centro della sfera. Questa è la ragione per cui gli aerei che devono andare da Roma a New York, che stanno alla stessa latitudine, puntano verso l'Inghilterra, vanno verso la Groenlandia e poi "scendono" verso New York: è il tragitto più breve.

---

<sup>7</sup> Attenzione: i due casi sono identici in una sola posizione, se mi spostassi lungo la verticale l'accelerazione di gravità  $g$  cambierebbe, quindi dovrei cambiare anche  $a$ . L'indistinguibilità è locale.

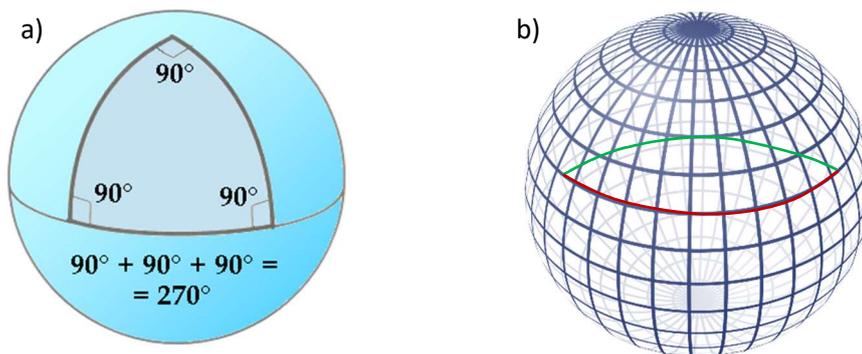


Fig. 6.3 Effetti in uno spazio non euclideo curvo. a) La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di  $180^\circ$ . b) La linea più breve fra due punti è una geodetica, la linea verde è più corta della linea rossa.

Vediamo ora un esempio un po' più complicato: quello in cui anche il tempo è curvo.

Consideriamo due oggetti (due persone?) che pensano di trovarsi in uno spazio piatto, e che stanno fermi nello spazio vuoto (oppure sulla Terra, ma senza nessun attrito)

Ecco la descrizione di quello che accade fatta dalle due persone: misurano la loro distanza e vedono che questa diminuisce. Da qui concludono che esiste una forza che li attrae l'uno all'altro. Infatti noi sappiamo che le due persone hanno una certa massa, per cui si attraggono secondo la legge di gravitazione universale. Posso disegnare le loro linee di universo in uno spazio-tempo piatto.

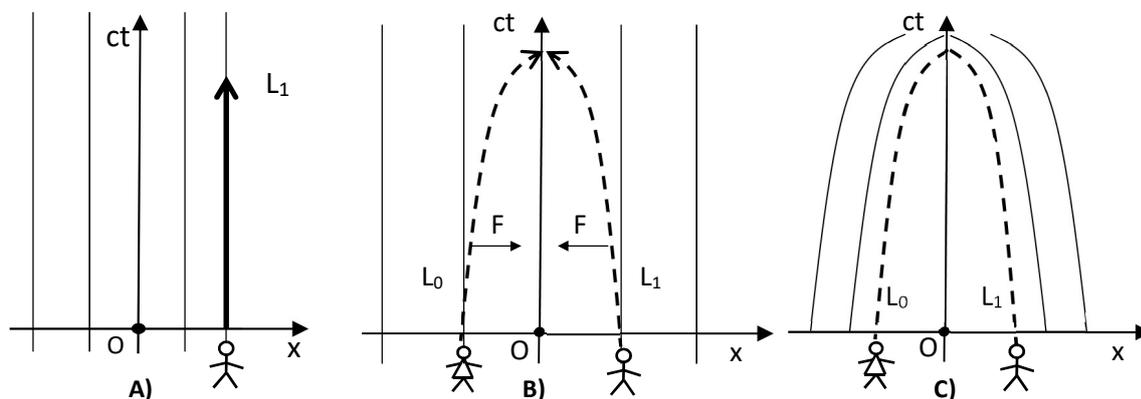


Fig. 6.4 Moto in uno spazio tempo a due dimensioni, una spaziale ( $x$ ) ed una temporale ( $t$ ). Le linee sottili rappresentano alcune linee di universo. A)  $L_1$  è la linea di universo dell'uomo indicato. L'uomo rimane ad una distanza costante rispetto alla linea di universo passante per l'origine  $O$ . B) Ho due persone, ferme nello spazio, che al passare del tempo vedono la loro distanza diminuire. Imputano questo all'esistenza di due forze uguali e contrarie (la forza dovuta alla legge di gravitazione universale). C) Come nel caso precedente, solo che lo spazio-tempo è curvo, le linee di universo sono curve. Le due persone vedono la distanza relativa che diminuisce ed attribuiscono questo al fatto che si stanno muovendo su linee curve, come se si trovassero su di una pista per bob. Non serve invocare nessuna forza di attrazione.

Ma se li facciamo muovere nello spazio-tempo ripetendo l'esperimento in uno **spazio curvo**, riusciranno a spiegare il loro avvicinamento senza dover introdurre nessuna forza esterna.

Secondo la Relatività Generale, quindi, lo spazio-tempo è uno spazio curvo di dimensione 4 [x, y, z, t]. Le traiettorie di un corpo in presenza di massa sono le «geodetiche»<sup>8</sup>, che non sono necessariamente delle linee rette.

#### 6.4.1. Lo spazio-tempo è curvato dalle masse

E la forza di gravità dove va a finire? La forza di gravità non mi serve più, non esiste (è solo comodo usarla). Quello che succede è che lo spazio senza massa/energia è piatto. Lo spazio in presenza di masse viene "curvato" dalle masse, che di conseguenza si muovono in uno spazio curvo "cadendo" le une verso le altre e muovendosi di conseguenza. La realtà fisica dello spazio-tempo è descritta da un'equazione che lega la presenza di materia/energia alla metrica, cioè alla geometria dello spazio-tempo curvo. La metrica è una funzione di quattro variabili indipendenti: (x,y,z,t). Come disse John Wheeler "La materia dice allo spazio-tempo come incurvarsi, e lo spazio curvo dice alla materia come muoversi".

Questa è l'equazione (in realtà sono una serie di equazioni) del campo di Einstein che descrive il comportamento dello spazio-tempo e delle masse-energie presenti nello spazio.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

La parte di sinistra descrive la geometria (curva) dello spazio tempo, la parte di destra è proporzionale alla distribuzione delle masse e delle energie nello spazio.

In questa versione non è stata inserita la cosiddetta "costante cosmologica" che A. Einstein aveva posto per tener conto della stabilità dell'universo, da lui supposto statico. In seguito si è visto che l'universo non è statico, è dinamico: dal Big Bang in poi l'universo si sta espandendo, quindi la costante cosmologica di Einstein non serviva<sup>9</sup>. L'equazione di Einstein è una delle equazioni più difficili di tutta la fisica. Non esistono soluzioni esatte valide in generale, ma sono state scritte varie soluzioni valide in sistemi particolari. Per esempio già nel lavoro originale Einstein fa un calcolo approssimato del moto di un punto in presenza di una "debole" perturbazione dello spazio-tempo, cioè non troppo vicino a masse non troppo grandi. La conclusione sono due equazioni equivalenti alla legge della gravitazione di Newton descritta nello spazio piatto della meccanica classica.

### 6.5. Conseguenze delle equazioni del campo di Einstein

Ciò che produce la curvatura dello spazio è la materia stessa. La curvatura determina a sua volta il moto della materia nello spazio. La distribuzione di materia e il suo moto non possono essere descritti indipendentemente dal campo gravitazionale da essi prodotti.

#### Effetti sullo spazio-tempo:

Le lunghezze (radiali) e i tempi dipendono dalla presenza di masse «nelle vicinanze». Questo vuol dire che se prendo un righello e lo misuro in direzione radiale rispetto ad una massa otterrò un valore che dipende dalla curvatura dello spazio in quel punto, che sarà tanto maggiore quanto più vicino mi troverò alla massa. Mentre un orologio andrà a velocità differente a seconda della distanza dalla massa sorgente della curvatura spazio-temporale<sup>10</sup>.

<sup>8</sup> Geodetica: è una particolare curva che descrive localmente la traiettoria più breve fra punti di un particolare spazio. Nel piano le geodetiche sono le linee rette, su una sfera sono gli archi di cerchio massimo. Può essere intesa come il percorso che compirebbe una particella non accelerata.

<sup>9</sup> Oggi la costante cosmologica è stata reintrodotta per giustificare alcune variazioni nella velocità di espansione dell'universo non previste dalla teoria di base. Questa costante è quindi concettualmente differente da quella proposta da Einstein.

<sup>10</sup> Attenzione: queste variazioni non posso misurarle con degli strumenti. Non è il righello in sé che si accorcia o l'orologio in sé che rallenta. E' lo spazio e il tempo che vengono modificati.

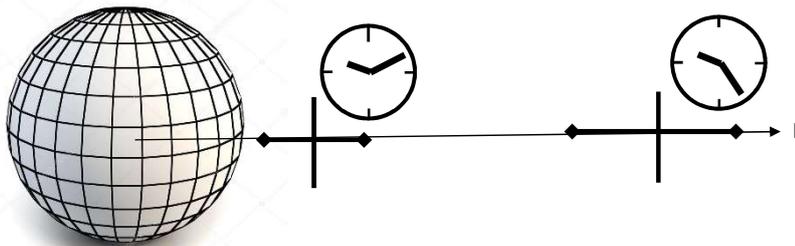


Fig. 6.5 Effetti sulla struttura dello spazio-tempo in presenza di un campo gravitazionale. Un righello di lunghezza  $L$  è più corto ed il tempo scorre più lentamente se misurati vicino alla massa che genera il campo gravitazionale.

In formule:

$$L(r) = L_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \quad t(r) = t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$$

Nota: la grandezza  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  è il cosiddetto Raggio di Schwarzschild; il fattore  $r_s$  ci dice la scala degli effetti. Quando l'oggetto ha una densità molto grande, tale che tutta la sua massa si trovi entro una sfera di raggio  $r_s$ , allora se la distanza dal centro di massa  $r$  è uguale a  $r_s$  succedono cose strane: sia la lunghezza del righello  $L_0$  che la durata dell'evento  $t_0$  diventano uguali a zero... spazio e tempo sembrano sparire, in realtà è la descrizione matematica che va scritta diversamente.

Per la Terra per esempio si ha che il suo raggio di Schwarzschild è di  $\frac{2GM_T}{c^2} = r_s \cong 9 \text{ mm}$ . Quindi vedremmo questi effetti se tutta la massa della Terra fosse confinata in una sferetta del diametro di 9 mm. Ma la densità media della Terra non è così alta, non è possibile confinarla tutta in 6 millimetri di diametro, quindi sulla Terra non dobbiamo preoccuparci di questi effetti al limite della descrizione fisico-matematica.

Un raggio di luce, al pari di un oggetto dotato di massa, deve subire l'azione del campo gravitazionale, ed eventualmente esserne "incurvato".

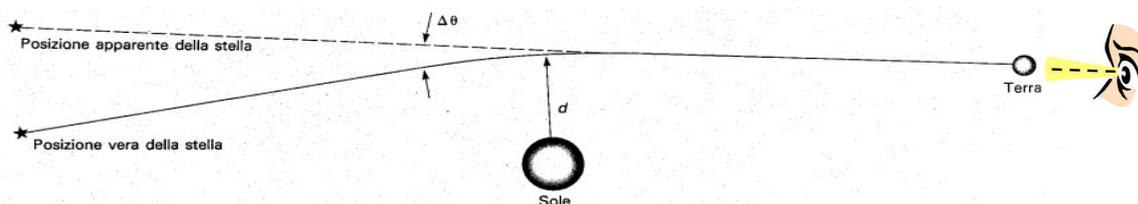


Fig. 6.6 Curvatura di un raggio luminoso che passa nelle vicinanze di una massa, quindi in presenza di un campo gravitazionale che "curva" lo spazio. L'effetto, visto da un osservatore p.e. sulla Terra, è di vedere uno spostamento della sorgente di un certo angolo.

La prima verifica si ebbe da parte di Sir A. Eddington nel 1919 dallo studio di un'eclisse solare.

Si osservò una deflessione di circa 1.7 secondi d'arco (questo angolo corrisponde al diametro di una moneta vista dalla distanza circa 3 km).

La teoria aveva la prima verifica sperimentale: la luce curva o «cade» in un campo gravitazionale.

### 6.5.1. Un effetto quotidiano: il GPS

Quasi ogni cellulare può determinare la nostra posizione con una precisione di circa 10 metri. Il corretto funzionamento di un localizzatore GPS dipende in maniera critica dalle formule della relatività sia generale che speciale applicate alla debolissima curvatura dello spazio tempo causata dalla Terra ed ai satelliti in orbita intorno alla Terra. Il sistema di localizzazione utilizza (almeno) 28 satelliti che ruotano intorno alla Terra su orbite differenti. Il funzionamento del GPS, per sommi capi, è questo: i satelliti del GPS inviano in continuazione verso la Terra delle serie di impulsi di onde e.m. Questi impulsi contengono tutta una serie di informazioni, compresa la posizione del satellite e il tempo in cui l'impulso è partito, misurato da un orologio atomico che si trova sul satellite. L'impulso del GPS viene ricevuto dal cellulare, dal ritardo fra emissione e ricezione si misura la distanza<sup>11</sup> fra il satellite e il cellulare, sapendo che la velocità della luce è costante.

Combinando i dati di quattro satelliti si può quindi calcolare la posizione del cellulare sulla superficie terrestre. Ma gli orologi sui satelliti sono sottoposti alla forza di gravità, che è differente da quella sulla Terra. Quindi misurano un tempo differente da quello che misurerebbero sulla Terra, il ritardo misurato dal cellulare quindi non è solo quello dovuto alla distanza percorsa dall'impulso e.m. Ricordiamoci che il tempo (la durata di un evento) in presenza di una massa viene curvato e dipende dalla distanza dal centro di massa,  $t(\mathbf{R}) \cong t_\infty \left(1 - \frac{R_0}{2R}\right)$  dove  $R_0 = \frac{2GM}{c^2}$ . Se inseriamo nella formula i vari dati: la massa e il raggio della Terra, l'altezza dei satelliti... arriviamo ad una correzione, su di un giorno, di circa 53  $\mu$ s. Poi dobbiamo considerare la correzione a causa della relatività speciale (il satellite viaggia ad una velocità di circa 13'600 km/h). Alla fine il nostro GPS ci fornisce l'indicazione di dove siamo con una precisione di circa 10-100 metri (meno di 1 metro per quelli militari). Se non avessimo apportato le correzioni dovute alla relatività generale ed alla relatività speciale avremmo avuto un errore, nella posizione, di vari chilometri (circa 5 km). Il GPS darebbe sempre un'indicazione sbagliata e sarebbe inutilizzabile.

## 6.6. L'ultima previsione verificata: le onde gravitazionali

Il giorno 11 febbraio 2016 David Reitze, portavoce dell'esperimento statunitense LIGO (advanced Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory)<sup>12</sup>, annunciò alla comunità scientifica mondiale un risultato atteso da decine di anni: la rivelazione diretta delle onde gravitazionali, previste da A. Einstein nell'ambito della Teoria della Relatività generale in un articolo del 1918<sup>13</sup>.

### 6.6.1. Cosa sono le onde gravitazionali e come sono state rivelate.

Possiamo servirci dell'analogia con le onde elettromagnetiche. Le equazioni di Maxwell descrivono perfettamente tutti i fenomeni (classici) che coinvolgono cariche elettriche ferme e/o in movimento. In particolare prevedono che se ho delle cariche elettriche accelerate, quindi che si muovono con velocità non costante, allora ho un'emissione di onde elettromagnetiche che viaggiano alla velocità della luce. Disponendo di un'opportuna antenna posso rivelare queste onde. E' quello che succede quando sentiamo squillare il cellulare o quando vediamo la TV. Nel caso delle equazioni del campo di Einstein

<sup>11</sup> In realtà i calcoli sono più complessi dato che l'orologio del cellulare non è preciso come quello del satellite. Ma questo con cambia la sostanza di ciò che accade

<sup>12</sup> L'esperimento è una collaborazione fra LIGO (USA) e VIRGO (Italia) che coinvolge ricercatori di tutto il mondo. La prima rivelazione fu fatta nei due laboratori statunitensi di LIGO, pochi mesi dopo seguirono altre rivelazioni fatte dai rivelatori di LIGO in contemporanea con quelli di VIRGO.

<sup>13</sup> Einstein, A. Über Gravitationswellen. *Sitzber. K. Preuss. Aka.* 154–167 (1918).

si può fare lo stesso discorso, come scrisse lo stesso Einstein. Se ho delle masse accelerate opportunamente<sup>14</sup> le equazioni del campo hanno una soluzione che rappresenta un'onda che si propaga nello spazio vuoto alla velocità della luce. Attenzione, non si tratta di un'onda elettromagnetica, ma di un'onda gravitazionale. La deformazione che viaggia è la deformazione dello spazio-tempo. Questa deformazione, quando raggiunge un corpo, deforma per qualche frazione di secondo lo spazio entro cui si trova il corpo, e quindi il corpo stesso allungandolo o accorciandolo, depositando nel corpo una quantità di energia infinitesima. Il problema è che questo effetto è piccolissimo, lo stesso Einstein pensava che non sarebbe mai stato misurato con la tecnologia disponibile all'epoca.

I tentativi per la rivelazione diretta delle onde, possibile solo per eventi galattici catastrofici tipo l'esplosione di una supernova o eventi che coinvolgono buchi neri, iniziarono negli anni '70 dello scorso millennio, ma è solo nei primi anni del nuovo secolo che furono realizzati sistemi in grado di rivelare effettivamente questi debolissimi segnali. La collaborazione LIGO – VIRGO nacque con l'idea di utilizzare come rivelatore un interferometro di Michelson in cui due raggi luminosi, percorrendo due cammini fra loro perpendicolari, vengono fatti incontrare e, tramite il fenomeno dell'interferenza, permettono la rivelazione di una piccolissima variazione nella lunghezza relativa dei due cammini.

L'evento misurato dagli interferometri di LIGO il 14 settembre 2015 alle ore 9:50:45 consisteva in una deformazione dello spazio percorso dai raggi laser (circa 50 km) di circa  $2 \times 10^{-18}$  m e della durata di circa 50 ms. La sorgente era la collisione di due buchi neri di 29 e 36 masse solari avvenuta circa 1,3 miliardi di anni fa.

E' interessante notare come l'apparato sperimentale utilizzato è concettualmente identico a quello di Michelson e Morley del 1887: allora un risultato "negativo" servì a corroborare quella che poi sarebbe stata la teoria della Relatività Speciale del 1905.

Nel 2015 un apparato simile, tramite un risultato "positivo", ha fornito una prova diretta che corrobora la teoria della Relatività Generale del 1916.

---

<sup>14</sup> Nel caso di un'onda elettromagnetica è più semplice, è sufficiente che una carica abbia un'accelerazione diversa da zero. Il caso gravitazionale è un po' più complicato, l'accelerazione da sola non è sufficiente, devo avere anche una certa geometria dell'oggetto massivo che accelera. Ma si tratta di dettagli.